TD$_{12}$ – Séries entières

Exercice 1 ★★

Déterminer le rayon de convergence R de chacune des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{n} z^n$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{(2n)!} z^n$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n z^n$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^{2n}}{2^n+1}$;
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{1+2+\cdots+n}$;
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^2 z^n$;
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\operatorname{ch} n}{n} z^n$;
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\operatorname{sh}(n)}{n} x^n$
9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{2n}}{n!}$;
10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n} \sin(n\theta)$;
11. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$.
12. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ où, pour $n \in \mathbb{N}$ a_n est le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n (e.g. $a_8 = 1$, $a_{232} = 3$).

Pour les séries entières de 6 à 11, déterminer la valeur de leur somme sur $]-R, R[$.

Exercice 2 ★★★

Calculer le développement en série entière au voisinage de 0 des fonctions suivantes (on précisera le domaine de validité) :

1. $f : x \mapsto \operatorname{ch} x \sin x$;
2. $f : x \mapsto \arcsin x$;
3. $f : x \mapsto -\dfrac{1-2x}{(2+x-x^2)^2}$;
4. $f : x \mapsto \sin^3 x$;
5. $f : x \mapsto \arctan(1+x^2)$.

Exercice 3 ★★

Soit f définie sur $]-1,1[$ par $f : x \mapsto \dfrac{x}{1-x^2}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 ★★

Déterminer, en justifiant son existence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}.$$

Exercice 5 ★★★

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{3p}}{(3p)!}$. Déterminer une expression simple de f en s'aidant de ses dérivées première et seconde.

Exercice 6 ★★

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)^2 x^n = 0$.

Exercice 7 ★★★

Montrer que $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

En déduire la valeur de
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n-1)^3x^n.$$

Exercice 8 ★★

Soit $\sum a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. Déterminer les rayons de convergence de $\sum \frac{a_n}{n!}z^n$ et $\sum \alpha^n a_nz^n$ où α est un nombre complexe.

Exercice 9 ★★★

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} a_0=a_1=1 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*, a_{n+1}=a_n+\dfrac{2}{n+1}a_{n-1}\end{cases}$

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*, 1\leqslant a_n\leqslant n^2$. En déduire le rayon de convergence R de la série $\sum a_nx^n$.
2. Montrer que sur $]-R,R[$, la somme S de cette série est solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, et en déduire une expression de S sur $]-R,R[$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 10 ★★★★

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0=1$ et : $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}u_ku_{n-k}$.

En considérant la série entière $\sum u_nx^n$, déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

Exercice 11 ★★

Convergence et calcul de la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{2n+3}{5^n}$.

Exercice 12 ★★★

Soit $f : x\mapsto \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Calculer $f(x)$ pour $x\in]-1,1[$.

   On pourra trouver a et b tels que $\frac{1}{n^2-1}=\frac{a}{n-1}+\frac{b}{n+1}$
3. En déduire les sommes $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}$ et $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(-1)^n}{n^2-1}$

Exercice 13 ★★★★

Soit f définie par $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ où $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer a_0 et a_1.
2. Prouver que (a_n) converge vers une limite $\ell\leqslant 1$.
3. Calculer a_n+a_{n+2} pour tout $n\in\mathbb{N}$. En déduire la valeur de ℓ.
4. Déterminer le rayon de convergence R de f.
5. Expliciter f.

Exercice 14 ★★★

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que définie par $a_0=1$ et $2a_n+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{n-k}}{k!}=0$ pour $n\geqslant 1$. On considère la série entière $\sum a_nx^n$, on note R son rayon et f sa somme.

1. Calculer a_1, a_2 et a_3.
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1, |a_n| < 1$. Qu'en déduire sur R ?
3. Montrer que, pour tout $|x| < R$, on a $f(x) = \dfrac{2}{1+e^x}$. En déduire que $R \leqslant \pi$.

Exercice 15 ★★

Développer en série entière les fonctions définies par

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = e^{-x}\cos(x)$$

Exercice 16 ★★★

1. Développer en série entière $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+x}$.
2. Montrer que
$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^1 \frac{x^p}{2+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+p+1)}$$
3. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)}$.

Exercice 17 ★★★

Soit $(E) : (1-x)y'(x) + y(x) = x$ sur $]-1, 1[$.
1. Résoudre (E).
2. Trouver, sans utiliser 1., les solutions de (E) développables en série entière (préciser les rayons)
3. Que dire de l'ensemble des solutions de (E) sur $]-1, 1[$?

Exercice 18 ★★★

On considère l'équation différentielle $(E) : x^2y'' + 4xy' + \left(2 - x^2\right)y = 1$.
1. Prouver que (E) possède une unique solution développable en série entière.
2. Exprimer cette solution à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 19 ★★★★

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
1. Montrer que f est développable en série entières et préciser le rayon.
2. Donner une équation différentielle du premier ordre dont f est solution et en déduire son développement en série entière.
3. Préciser, en lien avec la question 1, une autre forme de ce développement.

Exercices issus d'oraux

Exercice 20 ★★
(Oral 2013, 2019)

On considère la suite de Fibonacci définie par $\begin{cases} F_0 = 0,\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$

1. Déterminer une expression de F_n en fonction de n.
2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum F_n z^n$
3. Calculer la somme de cette série entière.

Exercice 21 ★★
(Oral 2014)

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$

1. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum \dfrac{x^n}{(n+1)!}$ et calculer $f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et expliciter ce développement en série entière.

Exercice 22 ★★★
(Oral 2015)

On pose $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ si $x \geqslant 0$ et $\mathrm{ch}(\sqrt{-x})$ si $x < 0$.

1. Montrer que f admet un développement en série entière au voisinage de 0 et le déterminer.
2. Déterminer $f'(0)$ et $f''(0)$.
3. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

Exercice 23 ★★★
(Oral 2018)

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

   On note f sa somme sur $]-R, R[$
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$
3. En déduire f à l'aide des fonctions usuelles.